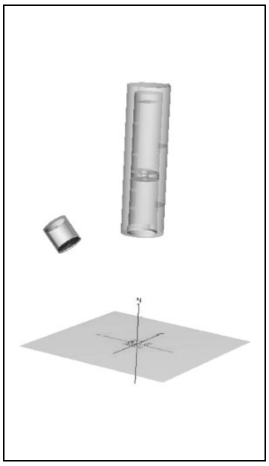

光学設計と直交多項式
－Zernike 多項式とその類似多項式－

昭和オプトロニクス株式会社　第二技術部
田邉貴大

1．はじめに

近年，光学設計や製造の諸分野において，直交多項式の利用が広まっている。Zernike 多項式は，この用途に古くから使われており, F. Zernikeにより円形開口の偏光計測を行うために考え出された[1)]。その後，Zernike 多項式は Seidel の 5 収差の瞳座標部分の表現と（線形変換すれば 1 対 1 に）対応するものであることが明らかになり[1]波面計測の分野で広く用いられるようになった。それだけでなく，特に偏心光学系の設計において，Zernike 多項式面を積極的に光学設計に応用し，自由曲面による収差補正に用いた例もある[2)]。

一方，通常の偶数次非球面の代わりに，特殊な重みづけされた直交多項式を用いることで光学設計をより効率的に進めようというアイデアも生まれた。Forbes による Q-type asphere [3)]である（ここでは簡単にForbes多項式と呼ぶ)。彼の考えでは, 通常の偶数次非球面項では各項の間に強いcross-term[2]があり最適化の効率が悪い。そこで直交性のよい非球面項を導入することで最適化における cross-term を無くし，設計効率が向上できるとされる。よく言われているように非球面項が直交していることと収差が直交していることは，絞り面上のレンズ面による軸上収差のような特別な場合を除いて直接の関連がなく,「直交多項式を使えば各収差が独立に補正できる」というのは必ずしも正しいと言えないが，少なくとも直交多項式を積極的にレンズ設計に応用しようとした点で高く評価されるべきであると考える。

Forbes が考えたように，ある関数を直交成分に分解するという考え方は，物理学や工学では一般的である。Zernike 多項式はその考えに基づき広く用いられるものであるにも関わらず,「光学の原理」[4)]による説明は省略した部分が多く分かりにくい面もある。また, 直交多項式になじみのない設計者にとっては, Zernike 多項式や Forbes 多項式は，全体像がつかめないため自由に使いこなすのが難しい面もあると思う。

本記事では直交多項式（特殊関数）の一般論を紹介し，その理論体系において，Zernike 多項式がどこに位置付けられるかを明らかにする。その過程で現れる直交多項式の手法を用いることにより，Zernike 多項式の数学的性質が容易に導出されることを紹介する。さらに，ここで紹介した手法により，Zernike 多項式と Forbes 多項式とが統一的に理解されることを示す。

光学設計においては，さまざまな直交多項式を用いた非球面式が提案されており，有効性を巡っては定性的な理解で留まっているのも否めない。紙面の都合もあり，本解説の内容は入り口にしか過ぎないが，光学における直交多項式の理解の一助になればと思う。

---

1 厳密にいうと，瞳座標の多項式で表された各収差成分（球面収差，コマ収差，非点収差，trefoil・・・）を線形変換により直交化したものに対応する。例えば Seidel の Y 方向のコマ収差は Zernike 多項式のZ_7とZ_2との線形和である。

2 ここでいう cross-term とは，関数の内積として直交性が悪いという意味である。つまり，ある非球面形状を偶数次非球面で展開しようとすると，係数のわずかな相違により，全く異なる面形状になってしまうということを意味する。